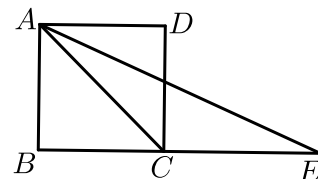


第3讲 正方形的性质与判定（练习）

一、正方形的性质

1. 如下图， E 为正方形 $ABCD$ 的边 BC 延长线上的点，且 $CE = AC$ ，连接 AE ，则 $\angle E =$ _____ 度。



【答案】 22.5

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$$\therefore \angle BAC = \angle CAD = 45^\circ,$$

$$\because AD \parallel BC,$$

$$\therefore \angle DAE = \angle E,$$

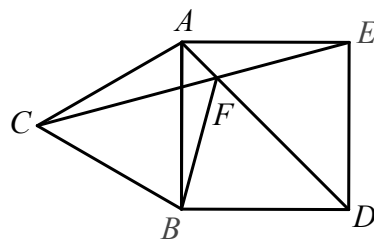
$$\because CE = AC,$$

$$\therefore \angle CAE = \angle E,$$

$$\therefore \angle E = \frac{1}{2} \angle CAD = 22.5^\circ.$$

【标注】 【知识点】 角的和差的计算与证明-需要分类讨论

2. 如图，在等边 $\triangle ABC$ 的外侧作正方形 $ABDE$ ， AD 与 CE 交于 F ，则 $\angle ABF$ 的度数为 _____ $^\circ$ 。



【答案】 15

【解析】 $\because \triangle ABC$ 是等边三角形，四边形 $ABDE$ 是正方形，

$$\therefore AC = AE, \angle CAB = 60^\circ, \angle EAB = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle CAE = 150^\circ,$$

$$\therefore \angle ACE = \angle AEC = 15^\circ,$$

在 $\triangle AEF$ 和 $\triangle ABF$ 中，

$$\begin{cases} AE = AB \\ \angle EAF = \angle BAF, \\ AF = AF \end{cases}$$

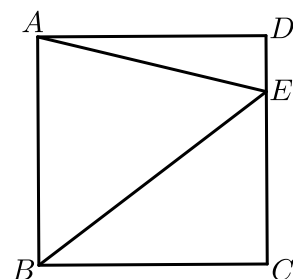
$\therefore \triangle AEF \cong \triangle ABF (\text{SAS})$ ，

$\therefore \angle ABF = \angle AEF = 15^\circ$ 。

故答案为：15。

【标注】【知识点】正方形的性质；SAS

3. 如图，点 E 在正方形 $ABCD$ 的边 CD 上。若 $\triangle ABE$ 的面积为8， $CE = 3$ ，则线段 BE 的长为 _____。



【答案】5

【解析】过 E 作 $EM \perp AB$ 于 M ，

$\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形，

$\therefore AD = BC = CD = AB$ ，

$\therefore EM = AD$ ， $BM = CE$ ，

$\because \triangle ABE$ 的面积为8，

$$\therefore \frac{1}{2} \times AB \times EM = 8，$$

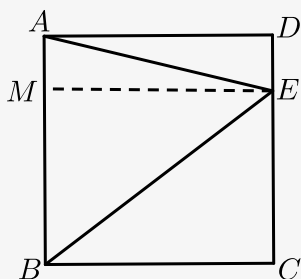
解得： $EM = 4$ ，

即 $AD = DC = BC = AB = 4$ ，

$\because CE = 3$ ，

由勾股定理得： $BE = \sqrt{BC^2 + CE^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ ，

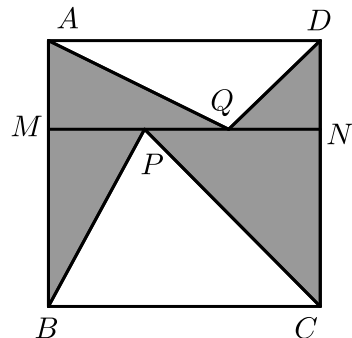
故答案为：5。



【标注】【知识点】正方形的性质

【知识点】勾股定理与实际问题

4. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长为4， $MN \parallel BC$ 分别交 AB ， CD 于点 M 、 N ，在 MN 上任取两点 P 、 Q ，那么图中阴影部分的面积是_____。



【答案】8

【解析】由图知，阴影部分的面积等于正方形的面积减去 $\triangle AQP$ 和 $\triangle BCP$ 的面积。

而点 P 到 BC 的距离与点 Q 到 AD 的距离的和等于正方形的边长，

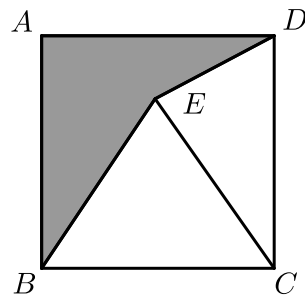
即 $\triangle AQP$ 和 $\triangle BCP$ 的面积的和等于正方形的面积的一半，

故阴影部分的面积是8。

故答案为：8。

【标注】【知识点】等积变换与“平行线”有关

5. 如图，正方形 $ABCD$ 的边长2， $\triangle BEC$ 是等边三角形，则阴影部分的面积等于_____。

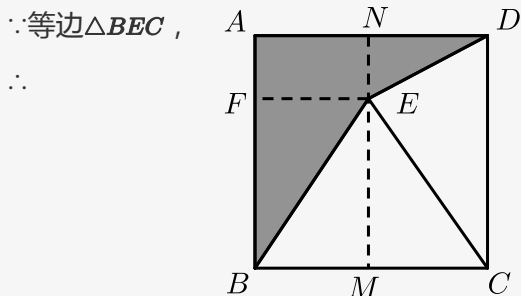


【答案】 $3 - \sqrt{3}$

【解析】过 E 做 $EN \perp AD$ ， $EM \perp BC$ ， $EF \perp AB$ ，

$\because$ 正方形 $ABCD$ ，

$\therefore M, E, N$ 共线， $AB = BC = AD = 2$ 。



$$BE = CE = BC = 2, \angle ECB = 60^\circ,$$

$$\therefore EM = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3},$$

$$BM = 2 \times \frac{1}{2} = 1,$$

$$\therefore EF = BM = 1, EN = 2 - EM = 2 - \sqrt{3},$$

$$\therefore S_{\text{阴}} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle ADE}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot AB \times EF + \frac{1}{2} \cdot AD \times EN$$

$$= \frac{1}{2} \times 2 \times 1 + \frac{1}{2} \times 2 \times (2 - \sqrt{3})$$

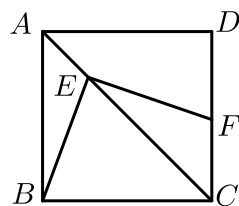
$$= 1 + 2 - \sqrt{3}$$

$$= 3 - \sqrt{3}.$$

【标注】【知识点】等边三角形的性质

【知识点】正方形的性质

6. 如图，点E是正方形ABCD对角线AC上一点，EC = BC，过点E作FE ⊥ BE，交CD于点F。



(1) $\angle BEC$ 的度数等于_____。

(2) 若正方形的边长为a，则CF的长等于_____。

【答案】(1) 67.5°

(2) $(\sqrt{2} - 1)a$

【解析】(1) ∵ AC是正方形ABCD对角线，

$$\therefore \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\because EC = BC,$$

$$\therefore \angle BEC = \angle EBC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle ACB) = 67.5^\circ.$$

(2) 在△ABE中， $\angle ABE = 180^\circ - (\angle BAE + \angle AEB) = 67.5^\circ - 45^\circ = 22.5^\circ$,

在 $\triangle ABE$ 和 $\triangle FEC$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle BAE = \angle ECF \\ AB = CE \\ \angle ABE = \angle FEC \end{cases},$$
 $\therefore \triangle ABE \cong \triangle FEC \text{ (ASA)} ,$

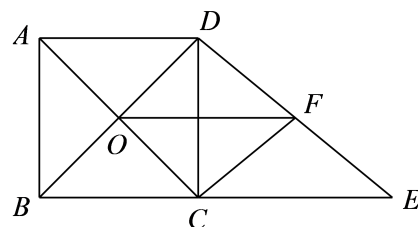
$$\therefore AE = CF ,$$

$$\therefore AE = (\sqrt{2} - 1)a , AC = \sqrt{2}a ,$$

$$\therefore CF = (\sqrt{2} - 1)a .$$

【标注】【知识点】ASA

7. 如图 , 正方形 $ABCD$ 的对角线相交于点 O , $BC = 6$, 延长 BC 至点 E , 使得 $CE = 8$, 点 F 是 DE 的中点 , 连接 CF 、 OF .



(1) 求 OF 的长 .

(2) 求 CF 的长 .

【答案】(1) $OF = 7$.

(2) $CF = 5$.

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形 ,

$$\therefore BC = CD = 6 , \angle BCD = \angle ECD = 90^\circ , OB = OD ,$$

$$\therefore CE = 8 ,$$

$$\therefore BE = 14 ,$$

$$\therefore OB = OD , DF = FE ,$$

$$\therefore OF = \frac{1}{2}BE = 7 .$$

$$(2) \text{ 在 } \text{Rt}\triangle DCE \text{ 中 , } DE = \sqrt{CD^2 + CE^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 ,$$

$$\therefore DF = FE ,$$

$$\therefore CF = \frac{1}{2}DE = 5 .$$

【标注】【知识点】直角三角形斜边中线性质的应用

【知识点】三角形的中位线

【知识点】勾股数

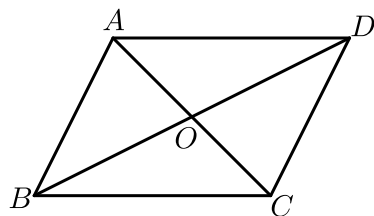
【知识点】正方形的性质

【能力】分析和解决问题能力

二、正方形的判定

8. 如图，下列四组条件中，能判定平行四边形 $ABCD$ 是正方形的有（ ）.

- ① $AB = BC$ ， $\angle BAD = 90^\circ$. ② $AC \perp BD$ ， $AC = BD$. ③ $OA = OD$ ， $BC = CD$. ④ $\angle BOC = 90^\circ$ ， $\angle ABD = \angle DCA$.



A. 1个

B. 2个

C. 3个

D. 4个

【答案】D

【解析】① $AB = BC$ ， $\angle BAD = 90^\circ$ ；

根据有一个角是直角且有一组邻边相等的平行四边形是正方形，能判定平行四边形 $ABCD$ 是正方形，故①正确；

② $AC \perp BD$ ， $AC = BD$ ；

由对角线互相垂直的平行四边形是菱形，对角线相等的平行四边形是矩形，既是菱形又是矩形的四边形是正方形，能判定平行四边形 $ABCD$ 是正方形，故②正确；

③ $OA = OD$ ， $BC = CD$ ；

由 $ABCD$ 是平行四边形，可得 AC 与 BD 互相平分，而 $OA = OD$ ，所以 $AC = BD$ ，对角线相等的平行四边形是矩形，有一组邻边相等的平行四边形是菱形，既是矩形又是菱形的四边形是正方形，能判定平行四边形 $ABCD$ 是正方形，故③正确；

④ $\angle BOC = 90^\circ$ ， $\angle ABD = \angle DCA$ ；

由 $\angle BOC = 90^\circ$ ，根据对角线互相垂直的平行四边形是菱形，可得平行四边形 $ABCD$ 是菱形；由 $ABCD$ 是平行四边形，可得 AC 与 BD 互相平分， $AB \parallel CD$ ，则

$\angle ABD = \angle CDB = \angle DCA$ ，所以 $OC = OD$ ，对角线相等的平行四边形是矩形，既是菱形又是矩形的四边形是正方形，能判定平行四边形 $ABCD$ 是正方形，故④正确。

故选D。

【标注】【知识点】正方形的判定

9. 已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，再从① $AB = BC$ ，② $\angle ABC = 90^\circ$ ，③ $AC = BD$ ，④ $AC \perp BD$ 四个条件中，选两个作为补充条件后，使得四边形 $ABCD$ 是正方形，现有下列四种选法，其中错误的是（ ）。

A. 选①② B. 选②③ C. 选①③ D. 选②④

【答案】 B

【解析】 A 选项：由①得有一组邻边相等的平行四边形是菱形，由②得有一个角是直角的平行四边形是矩形，所以平行四边形 $ABCD$ 是正方形，正确，故本选项不符合题意。

B 选项：由②得有一个角是直角的平行四边形是矩形，由③得对角线相等的平行四边形是矩形，所以不能得出平行四边形 $ABCD$ 是正方形，错误，故本选项符合题意。

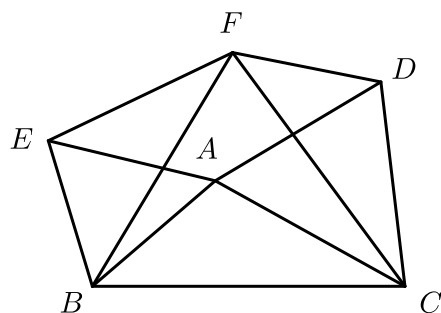
C 选项：由①得有一组邻边相等的平行四边形是菱形，由③得对角线相等的平行四边形是矩形，所以平行四边形 $ABCD$ 是正方形，正确，故本选项不符合题意。

D 选项：由②得有一个角是直角的平行四边形是矩形，由④得对角线互相垂直的平行四边形是菱形，所以平行四边形 $ABCD$ 是正方形，正确，故本选项不符合题意。

故选 B。

【标注】【知识点】正方形的判定

10. 如图，以 $\triangle ABC$ 的三边为边分别作等边 $\triangle ACD$ 、 $\triangle ABE$ 、 $\triangle BCF$ 。



- (1) 求证： $\triangle EBF \cong \triangle ABC$ 。
- (2) 求证：四边形 $AEFD$ 是平行四边形。
- (3) 解答下列问题：
- ① $\triangle ABC$ 满足 _____ 时，四边形 $AEFD$ 是菱形。
- ② $\triangle ABC$ 满足 _____ 时，四边形 $AEFD$ 是正方形。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) 证明见解析。

(3) ① $AB = AC$

② $AB = AC$ 且 $\angle BAC = 150^\circ$

【解析】(1) $\because \triangle ABE$ 、 $\triangle BCF$ 均为等边三角形 ,

$$\therefore BA = BE, BF = BC,$$

$$\angle EBA = \angle FBC = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EBA = \angle EBF + \angle FBA,$$

$$\angle FBC = \angle ABC + \angle FBA,$$

$$\therefore \angle EBF = \angle ABC,$$

在 $\triangle EBF$ 和 $\triangle ABC$ 中 ,

$$\begin{cases} BA = BE \\ \angle EBF = \angle ABC, \\ BF = BC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle EBF \cong \triangle ABC \text{ (SAS)} .$$

(2) $\because \triangle EBF \cong \triangle ABC$,

$$\therefore EF = AC = AD,$$

$$\therefore \angle BCA = \angle BCF - \angle FAC,$$

$$\angle FCD = \angle ACD - \angle FAC,$$

$$\therefore \angle FCD = \angle BCA,$$

$$\therefore BC = FC, AC = DC,$$

$$\therefore \triangle BCA \cong \triangle FCD \text{ (SAS)} ,$$

$$\therefore FD = AB = AE,$$

$\therefore$ 四边形 $AEFD$ 是平行四边形 .

(3) ① 若平行四边形 $AEFD$ 是菱形 , 则 $AD = AE$,

$$\therefore AE = AB, AC = AD,$$

$\therefore$ 当 $\triangle ABC$ 满足 $AB = AC$ 时 , 四边形 $AEFD$ 是菱形 .

② 由 ① 知 , 若菱形 $AEFD$ 是正方形 ,

$$\text{则 } \angle EAD = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EAD + \angle EAB + \angle DAC + \angle BAC = 360^\circ$$

$$\therefore \angle BAC = 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 150^\circ,$$

$\therefore$ 当 $\triangle ABC$ 满足 $AB = AC$ 且 $\angle BAC = 150^\circ$ 且时 , 四边形 $AEFD$ 是正方形 .

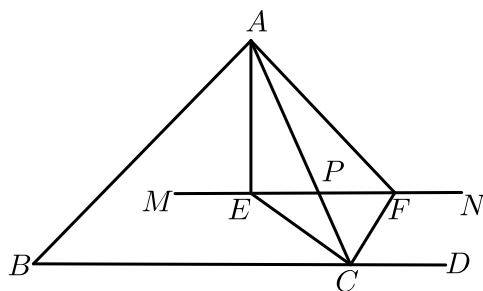
【标注】【知识点】 SAS

【知识点】 平行四边形的判定及应用

【知识点】 菱形的判定-从平行四边形

【知识点】 正方形的判定

11. 如图, $\triangle ABC$ 中, $MN \parallel BD$ 交 AC 于 P , $\angle ACB$ 、 $\angle ACD$ 的平分线分别交 MN 于 E 、 F .



- (1) 求证: $PE = PF$.
- (2) 当 MN 与 AC 的交点 P 在什么位置时, 四边形 $AECF$ 是矩形, 说明理由.
- (3) 当 $\triangle ABC$ 满足什么条件时, 四边形 $AECF$ 是正方形. (不需要证明)

【答案】(1) 证明见解析.

(2) 当 P 是 AC 中点时, 四边形 $AECF$ 是矩形.

(3) 当 $AC \perp BC$ 时, 即 $\angle ACB = 90^\circ$ 时, 四边形 $AECF$ 是正方形.

【解析】(1) $\because CE$ 平分 $\angle ACB$, CF 平分 $\angle ACD$,

$$\therefore \angle ACE = \angle BCE, \angle ACF = \angle DCF,$$

又 $\because MN \parallel BD$,

$$\therefore \angle PEC = \angle PCE = \angle BCE,$$

$$\therefore PE = PC,$$

$$\angle PFC = \angle FCD = \angle PCF,$$

$$\therefore PF = PC,$$

$$\therefore PE = PC = PF,$$

$$\therefore PE = PF.$$

(2) 当 P 是 AC 中点时, 四边形 $AECF$ 是矩形,

$$\because PA = PC, PF = PC,$$

$\therefore$ 四边形 $AECF$ 是平行四边形,

$$\because PE = PC,$$

$\therefore AC = EF$, 四边形 $AECF$ 是矩形.

(3) 当 $AC \perp BC$ 时, 即 $\angle ACB = 90^\circ$ 时, 四边形 $AECF$ 是正方形,

$$\because \angle BCA = 90^\circ, EF \parallel DB,$$

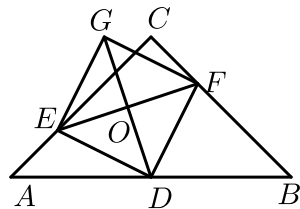
$$\therefore \angle EPO = 90^\circ,$$

则 $EF \perp AC$,

$\therefore$ 矩形 $AECF$ 是正方形 .

【标注】【知识点】矩形的判定-从平行四边形

12. 如图, 在等腰直角三角形 ABC 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 4$, D 是 AB 的中点, E, F 分别是 AC, BC 上的点 (点 E 不与端点 A, C 重合), 且 $AE = CF$, 连接 EF 并取 EF 的中点 O , 连接 DO 并延长至点 G , 使 $GO = OD$, 连接 DE, DF, GE, GF .



- (1) 求证: 四边形 $EDFG$ 是正方形 .
 (2) 当点 E 在什么位置时四边形 $EDFG$ 的面积最小?

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 当点 E 为线段 AC 的中点时, 四边形 $EDFG$ 的面积最小 .

【解析】 (1) 连接 CD , 如图1所示 .

$\because \triangle ABC$ 为等腰直角三角形,
 $\angle ACB = 90^\circ$, D 是 AB 的中点,
 $\therefore \angle A = \angle DCF = 45^\circ$, $AD = CD$.

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle CDF$ 中,

$$\begin{cases} AE = CF \\ \angle A = \angle CDF \\ AD = CD \end{cases}$$

$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CDF (SAS)$,

$\therefore DE = DF$, $\angle ADE = \angle CDF$.

$\because \angle ADE + \angle EDC = 90^\circ$,

$\therefore \angle EDC + \angle CDF = \angle EDF = 90^\circ$,

$\therefore \triangle EDF$ 为等腰直角三角形.

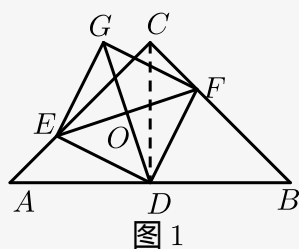
$\because O$ 为 EF 的中点, $GO = OD$,

$\therefore GD \perp EF$, 且 $GD = 2OD = EF$,

$\therefore$ 四边形 $EDFG$ 是正方形.

(2) 过点 D 作 $DE' \perp AC$ 于 E' , 如图2所示.

$\because \triangle ABC$ 为等腰直角三角形, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC = 4$,



$\therefore DE' = \frac{1}{2}BC = 2$, $AB = 4\sqrt{2}$, 点
 E' 为 AC 的中点 ,
 $\therefore 2 \leq DE < 2\sqrt{2}$ (点 E 与点 E' 重合
 时取等号) .

$\therefore 4 \leq S_{\text{四边形}EDFG} = DE^2 < 8$.

$\therefore$ 当点 E 为线段 AC 的中点时 , 四边形 $EDFG$ 的面积最小 .

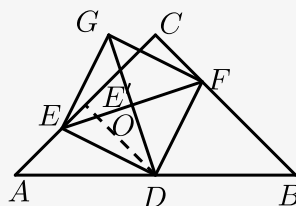


图 2

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角